TITLE:

SNSの流行を記述する数理モデルの最終規模方程式について (常微分方程式の定性的理論とその周辺)

AUTHOR(S):

小林, 和也; 中田, 行彦

CITATION:

小林, 和也 ...[et al]. SNSの流行を記述する数理モデルの最終規模方程式について (常微分方程式の定性的理論とその周辺). 数理解析研究所講究録 2017, 2032: 34-37

ISSUE DATE:

2017-06

URL:

http://hdl.handle.net/2433/236757

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第2032巻 2017年 34-37

SNS の流行を記述する数理モデルの最終規模方程式について

小林和也、中田行彦

概要. 本稿では、SNS（ソーシャルネットワークサービス）の流行を記述する数理モデルのダイナミクスを考察する。SNS の流行モデルは、SIR 型感染症モデルを基に、非線形な常微分方程式で定式化されており、その解挙動も類似なものとなっている。解の極限が満たす方程式（最終規模方程式）を導出する。この最終規模方程式を解析すると、最初期に SNS の利用や参加に消極的な人口の数が少ないほど、最終的に SNS の利用を止めたユーザー数は多くなることが示される。

1. はじめに

論文 [1] の著者らは、以下のような数理モデルを用いて、MySpace や Facebook などの SNS（ソーシャルネットワークサービス）の流行や衰退の説明を試みている：

(1.1a) $$S'(t) = -\beta S(t)I(t),$$

(1.1b) $$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)R(t),$$

(1.1c) $$R'(t) = \alpha I(t)R(t).$$

ここで、$S(t)$ は時間 t における SNS の潜在的なユーザーの数、$I(t)$ は時間 t における SNS のユーザーの数、$R(t)$ は時間 t における SNS に飽きたり利用を止めたユーザーの数を表している。また β, α は正のパラメータである。SIR 型感染症モデルとの違いは、SNS ユーザーの「回復率」が $R(t)$ に依存している点である。このことについて論文 [1] の著者らは次のように論じている。

> *Contrary to the SIR model's assumption of a characteristic recovery rate for diseases, OSN users do not join an OSN expecting to leave after a predetermined amount of time. Instead, every user that joins the network expects to stay indefinitely, but ultimately loses interest as their peers begin to lose interest.*

論文 [1] では、上記の数理モデルを用いて Google による検索数のデータをフィッティングすることに焦点が当てられていた。本論文では簡単な数理解析によって、数理モデルの解の極限が満たす関係式を導出し、その解析によって SNS の流行メカニズムについて考察する。

2. 相平面におけるモデル解析

まず、

$$0 \le S(0),\ I(0),\ R(0) \le 1,\ S(0) + I(0) + R(0) = 1$$

となるように流行モデル (1.1) の初期値を選ぶ。$I(0)$ は最初期の SNS ユーザー数を表しており、十分小さな数とし、全人口を 1 としている。

次が成り立つことは明らかである：

(2.1) $$S(t) + I(t) + R(t) = 1.$$

さらに、S と R の単調性と (2.1) から $S,\ I,\ R$ の極限がそれぞれ存在する。それぞれの極限を次の様に表す。

$$S(\infty) = \lim_{t\to\infty} S(t),\ I(\infty) = \lim_{t\to\infty} I(t),\ R(\infty) = \lim_{t\to\infty} R(t).$$

(2.1) から以下の等式が成り立つ。

$$S(\infty) + I(\infty) + R(\infty) = 1. \tag{2.2}$$

さらに、ここでは証明を省略するが、$R(\infty) = R(0)e^{\alpha\int_0^\infty I(s)ds}$ から

$$I(\infty) = 0$$

が成り立つことが示される。流行モデル (1.1) では、必ず SNS が衰退することを示している。よって (2.2) から

$$S(\infty) + R(\infty) = 1 \tag{2.3}$$

を得る。これは SNS の衰退後に人口集団が S と R のみで構成されることを示していることは言うまでもない。

$S(\infty)$ と $R(\infty)$ の関係式をもう一つ得ることが出来れば、それぞれの極限を求めることが期待できる。モデル (1.1) から次の式を得る。

$$\frac{S'(t)}{S(t)} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{R'(t)}{R(t)} = 0.$$

両辺を積分することで、

$$\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)\left(\frac{R(t)}{R(0)}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} = 1 \tag{2.4}$$

を得る。これは、(S, R) 平面における $(S(t), R(t))$, $t \geq 0$ の軌跡を表している。これより $S(\infty)$ と $R(\infty)$ は次の式を満たす：

$$\left(\frac{S(\infty)}{S(0)}\right)\left(\frac{R(\infty)}{R(0)}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} = 1. \tag{2.5}$$

上記の議論から、(2.3) と (2.5) の根として $(S(\infty), R(\infty))$ を得ることが出来る。即ち、(S, R) 平面において定義される次の直線と曲線の交点として $(S(\infty), R(\infty))$ が得られる：

$$S + R = 1, \tag{2.6}$$

$$\left(\frac{S}{S(0)}\right)\left(\frac{R}{R(0)}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} = 1. \tag{2.7}$$

$S(0) + R(0) < 1$ に注意すると、（$[0,1] \times [0,1]$ において）直線 (2.6) と曲線 (2.7) は常に 2 点の交点を持つことが分かる。さらに S は単調減少関数であり、R は単調増加関数であることから、

$$S(\infty) \leq S(0),\ R(\infty) \geq R(0)$$

が成り立つ。よって、点 $(S(\infty), R(\infty))$ の位置は 1 つに定まる。

また最後に $I(t)$ の挙動についても言及しておく。最初期の流行は、$\beta S(0) - \alpha R(0)$ の符号によって決定される：

$$\operatorname{sign}(\beta S(0) - \alpha R(0)) = \operatorname{sign} I'(0).$$

さらに、S, R の単調性より、$\beta S(0)-\alpha R(0)\leq 0$ なら I は $t\geq 0$ で単調減少関数であり、$\beta S(0)-\alpha R(0)>0$ なら I は初期時刻において増加関数となる（やがて微分係数は 0 となり、その後減少し $I(\infty)=0$ となる）。このことから

$$\beta S(0)>\alpha R(0) \tag{2.8}$$

が SNS が流行するための必要十分条件となる。

3. 最終規模方程式

$I(0)$ は十分小さな数であることから、$I(0)\to 0$ として、初期値に関する解の極限挙動を考えてみよう。このとき

$$S(0)\to 1-R(0)$$

より、$p=\frac{\beta}{\alpha}$ と定義すると、SNS が流行する条件は (2.8) より

$$R(0)<\frac{p}{1+p} \tag{3.1}$$

で与えられる。また、(2.5) から、$R(\infty)$ は次の方程式の根となる：

$$\left(\frac{1-R(\infty)}{1-R(0)}\right)\left(\frac{R(\infty)}{R(0)}\right)^p=1. \tag{3.2}$$

$R(\infty)$ は最終的に SNS の利用を止めたユーザー数であるが、その初期値 $R(0)$ に関する依存性はどの様になっているだろうか。$R(0)$ は $t=0$ において、SNS の利用や参加に消極的な人口の数と解釈出来る。以下の議論によって、$R(\infty)$ は $R(0)$ について単調減少であることを示す。即ち、最初期に SNS の利用や参加に消極的な人口の数が少ないほど、最終的に SNS の利用を止めたユーザー数は多くなることが示されるのである。

最終規模方程式 (3.2) を考察するために、関数 f を

$$f(x,y)=\left(\frac{1-y}{1-x}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^p,\ (x,y)\in[0,1]\times[0,1]$$

と定義する。陰関数定理によって、方程式

$$f(x,y)=1$$

から $y'(x)$ を計算する事が出来る。

$$\partial_y f(x,y)=\frac{1}{(1-x)\,x}\left(\frac{y}{x}\right)^{p-1}(p-(1+p)\,y),$$
$$\partial_x f(x,y)=-\frac{1-y}{x\,(1-x)^2}\left(\frac{y}{x}\right)^p(p-(1+p)\,x)$$

から、

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial_x f(x,y)}{\partial_y f(x,y)}=\frac{y\,(1-y)}{x\,(1-x)}\left(\frac{p-(1+p)\,x}{p-(1+p)\,y}\right)$$

となる。今、十分大きな時間 t では、$\beta S(t)-\alpha R(t)<0$ が成り立つことから、

$$R(\infty)<\frac{p}{1+p}$$

が成り立つ。また (3.1) より

$$\frac{dR(\infty)}{dR(0)}<0$$

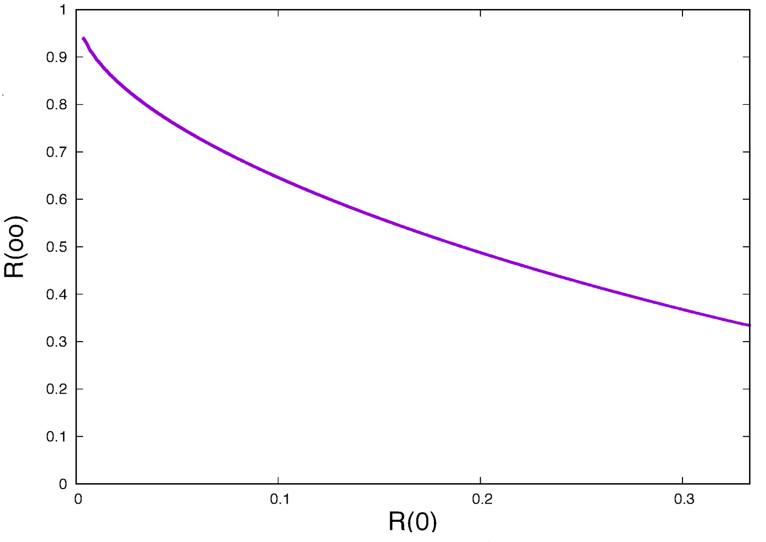

図 3.1. $(R(0), R(\infty))$ のグラフ：縦軸は最終的に SNS の利用を止めるユーザー数を表し、横軸は最初期に SNS の利用や参加に消極的な人口の数を表している。$R(0)$ が大きいと、SNS の潜在的なユーザーの数が少ないことから、SNS の流行が難しくなり、最終的に SNS の利用を止めるユーザー数は少なくなる。

である事がわかる。

このように $R(\infty)$ は $R(0)$ について単調減少関数であることがわかる。図 3.1 は、(3.2) を満たす $(R(0), R(\infty))$ のグラフであり、実際に単調減少性を見る事ができる。最初期に SNS の利用や参加に消極的な人口の数が少ないほど、最終的に SNS の利用を止めたユーザー数は多くなることを示している。これは、$R(0)$ が少ないことは、SNS の潜在的なユーザーの数が多いことを意味し、結果 SNS の流行が起こることに対して、$R(0)$ が大きい人口集団では、SNS の潜在的なユーザーの数が少なく、SNS の流行が難しいというメカニズムによって、理解されるであろう。

参考文献

[1] J. Cannarella, J. A. Spechler, Epidemiological modeling of online social network dynamics, arXiv:1401.4208, (2014)

島根大学　総合理工学部　数理・情報システム学科（小林和也）

島根大学大学院　総合理工学研究科　数理科学領域（中田行彦）
E-mail address: ynakata@riko.shimane-u.ac.jp